

1.2 Α. ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ – ΜΟΝΩΝΥΜΑ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Αριθμητική παράσταση : Είναι η παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών

2.

Αλγεβρική παράσταση : Είναι η παράσταση που περιέχει πράξεις μεταξύ αριθμών και μεταβλητών ή μεταξύ μόνο μεταβλητών

3.

Ακέραια αλγεβρική παράσταση : Είναι η παράσταση που μεταξύ των μεταβλητών της σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού κι οι εκθέτες των μεταβλητών είναι φυσικοί αριθμοί

4.

Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης

Είναι ο αριθμός που βρίσκουμε αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με αριθμούς και εκτελέσουμε όλες τις πράξεις

5.

Μονώνυμα : Είναι οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις που μεταξύ των μεταβλητών τους σημειώνεται μόνο πολλαπλασιασμός

6.

Μέρη μονωνύμου : i) Ο αριθμητικός παράγοντας που λέγεται συντελεστής
ii) Οι μεταβλητές με τους εκθέτες τους που αποτελούν το κύριο μέρος

7.

Βαθμός μονωνύμου: Ο εκθέτης μιας μεταβλητής λέγεται βαθμός του μονωνύμου ως προς την μεταβλητή αυτή .
Βαθμός μονωνύμου ως προς δύο ή περισσότερες μεταβλητές του λέγεται το άθροισμα των εκθετών αυτών των μεταβλητών .

8.

Όμοια μονώνυμα : Είναι τα μονώνυμα με το ίδιο κύριο μέρος

9.

Ίσα μονώνυμα : Είναι τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή

10.

Αντίθετα μονώνυμα : Είναι τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές .

11.

Συμφωνία : Συμφωνούμε ότι και οι αριθμοί είναι μονώνυμα τα οποία ονομάζουμε σταθερά.

Ειδικότερα το 0 το λέμε μηδενικό μονώνυμο .

Βαθμός στα σταθερά μονώνυμα είναι το 0, ενώ για το μηδενικό μονώνυμο βαθμός δεν ορίζεται βαθμός.

ΣΧΟΛΙΑ

1.

Εύρεση αριθμητικής τιμής : Φέρνουμε την αλγεβρική παράσταση στην τελική της μορφή και μετά βρίσκουμε την αριθμητική της τιμή

2.

Διευκρίνιση : Στο μονώνυμο $5x^3y^2\omega$, συντελεστής είναι το 5
κύριο μέρος είναι το $x^3y^2\omega$
βαθμός ως προς x είναι $3^{ος}$
βαθμός ως προς x και ω είναι $4^{ος}$

3.

Επισήμανση : Το μονώνυμο $a^2\beta\gamma$ έχει συντελεστή το 1

Το μονώνυμο $-x^4yz^3$ έχει συντελεστή το -1

Τα μονώνυμα $\frac{a^2\beta^3}{7}$ και $\frac{-4a^5\beta}{3}$ έχουν συντελεστές $\frac{1}{7}$ και $-\frac{4}{3}$

4.

Επισήμανση : Αν θέλω να βρω το συντελεστή και το κύριο μέρος σε ένα μονώνυμο, αυτό πρέπει να είναι στην τελική του μορφή

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

- α) Να γράψετε δύο αλγεβρικές παραστάσεις που δεν είναι μονώνυμα
 β) Να γράψετε τρία μονώνυμα με μεταβλητές τα a , β και γ
 γ) Να γράψετε τρία όμοια μονώνυμα με μεταβλητές x και y
 δ) Να γράψετε δύο ίσα μονώνυμα με μεταβλητές a και β
 ε) Να γράψετε δύο αντίθετα μονώνυμα με μεταβλητές x και y

Προτεινόμενη λύση

- α) $3x^2y + 5x$ και $2a\gamma + \frac{1}{4a}$
 β) $a\beta\gamma$, $-5a^2\beta^3\gamma^4$, $2a\beta\gamma^4$
 γ) $2x^3y^2$, $\frac{5}{2}x^3y^2$, $\sqrt{3}x^3y^2$
 δ) $2a\beta$ και $2a\beta$
 ε) $3xy^2$ και $-3xy^2$

Θεωρία
5-8-9-10

2.

Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

- α) $A = \frac{1}{4}a^2\beta^3 - \frac{4}{3}a\beta^2$ όταν $a = -2$ και $\beta = -1$
 β) $B = 2(x + 3y) - (5 - 3x + y)$ όταν $x = 2$ και $y = 4$

Σχόλιο1

Προτεινόμενη λύση

α)

$$A = \frac{1}{4}(-2)^2(-1)^3 - \frac{4}{3}(-2)(-1)^2 = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot (-1) - \frac{4}{3}(-2) \cdot 1 = -1 + \frac{8}{3} = \frac{5}{3}$$

β)

$$B = 2(x + 3y) - (5 - 3x + y) = 2x + 6y - 5 + 3x - y = 5x + 5y - 5$$

$$\text{Όταν } x = 2 \text{ και } y = 4 \text{ έχουμε } B = 5 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 5 = 10 + 20 - 5 = 25$$

3.

Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων

α) $A = 2(x + 3y - 1) - 4(-x - 4y + 5) + x - 8y$ όταν $x + 2y = 5$

β) $B = 6 - 4(-\alpha - \gamma + \beta) + 2(\alpha + 3\beta - 5)$ όταν $\alpha + \beta = 2$ και $\gamma - \beta = -1$

Προτεινόμενη λύση

α)

$$\begin{aligned} A &= 2(x + 3y - 1) - 4(-x - 4y + 5) + x - 8y = 2x + 6y - 2 + 4x + 16y - 20 + x - 8y = \\ &= 7x + 14y - 22 = \\ &= 7(x + 2y) - 22 \end{aligned}$$

Όταν $x + 2y = 5$ έχουμε $A = 7 \cdot 5 - 22 = 13$

β)

$$\begin{aligned} B &= 6 - 4(-\alpha - \gamma + \beta) + 2(\alpha + 3\beta - 5) = 6 + 4\alpha + 4\gamma - 4\beta + 2\alpha + 6\beta - 10 = \\ &= 6\alpha + 2\beta + 4\gamma - 4 = \\ &= 6\alpha + 6\beta - 4\beta + 4\gamma - 4 = \\ &= 6(\alpha + \beta) + 4(\gamma - \beta) - 4 \end{aligned}$$

Όταν $\alpha + \beta = 2$ και $\gamma - \beta = -1$ έχουμε $B = 6 \cdot 2 + 4(-1) - 4 = 12 - 4 - 4 = 4$

4.

Στα παρακάτω μονώνυμα να βρεθεί ποιος είναι ο συντελεστής και ποιο το κύριο μέρος

$$-\frac{3}{4}x^2y^2, \quad x^3y^4, \quad \frac{5x^5y^7}{6}, \quad (-4x^2\omega^2)(2y\omega^4), \quad \frac{(-3xy^3\omega^4)(-x^2y^7)}{2}$$

Προτεινόμενη λύση

$-\frac{3}{4}x^2y^2$ συντελεστής $-\frac{3}{4}$ και κύριο μέρος x^2y^2

Σχόλια 2 - 4

x^3y^4 συντελεστής 1 και κύριο μέρος x^3y^4

$\frac{5x^5y^7}{6} = \frac{5}{6}x^5y^7$ συντελεστής $\frac{5}{6}$ και κύριο μέρος x^5y^7

$(-4x^2\omega^2)(2y\omega^4) = -8x^2\omega^6y$ συντελεστής -8 και κύριο μέρος $x^2\omega^6y$

$\frac{(-3xy^3\omega^4)(-x^2y^7)}{2} = \frac{3}{2}x^3y^{10}\omega^4$ συντελεστής $\frac{3}{2}$ και κύριο μέρος $x^3y^{10}\omega^4$

5.

Τα παρακάτω μονώνυμα να τα χωρίσετε σε ομάδες ομοίων μονωνύμων .

$$-x, \quad \frac{3}{5}x^2, \quad 7x, \quad -8x^5, \quad -\frac{1}{2}x^4, \quad \sqrt{3}x, \quad -x^2, \quad 0,1x^2, \quad 5x^4, \quad \frac{2x}{7}$$

Προτεινόμενη λύση

$$1^{\text{η}} \text{ ομάδα : } -x, \quad 7x, \quad \sqrt{3}x, \quad \frac{2x}{7}$$

$$2^{\text{η}} \text{ ομάδα : } \frac{3}{5}x^2, \quad -x^2, \quad 0,1x^2$$

$$3^{\text{η}} \text{ ομάδα : } -8x^5$$

$$4^{\text{η}} \text{ ομάδα : } -\frac{1}{2}x^4, \quad 5x^4$$

6.

Στην παράσταση $2a^{\lambda+1}x^2 + 3a^2x^{\mu+2}$ να προσδιοριστούν οι ακέραιοι μ, λ , ώστε αυτή να είναι μονώνυμο. Στη συνέχεια να βρείτε τον συντελεστή και το κύριο μέρος

Προτεινόμενη λύση

$$\text{Πρέπει } \lambda + 1 = 2 \text{ και } \mu + 2 = 2$$

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = 0$$

Τότε η παράσταση $2a^{\lambda+1}x^2 + 3a^2x^{\mu+2}$ γίνεται $2a^2x^2 + 3a^2x^2 = 5a^2x^2$ με συντελεστή 5 και κύριο μέρος a^2x^2

7.

Να βρείτε το μονώνυμο που μας δίνει

α) Την επιφάνεια ενός κύβου ακμής a

β) Τον όγκο ενός κύβου ακμής a

γ) Των παραπάνω μονωνύμων να βρείτε την αριθμητική τιμή όταν $a = 2$

Προτεινόμενη λύση

α)

Η επιφάνεια του κύβου αποτελείται από 6 τετράγωνα πλευράς a

Το εμβαδόν του κάθε τετραγώνου είναι a^2

Άρα το μονώνυμο που μας δίνει την επιφάνεια είναι το $6a^2$

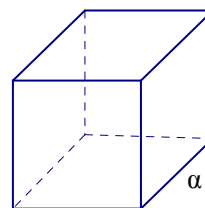
β)

Ο όγκος του κύβου δίνεται από το μονώνυμο a^3

γ)

Η αριθμητική τιμή των παραπάνω μονωνύμων όταν $a = 2$ είναι

$$6 \cdot 2^2 = 24 \text{ και } 2^3 = 8 \text{ αντίστοιχα}$$



8.

Ένα ορθογώνιο έχει πλάτος x και μήκος τριπλάσιο από το πλάτος. Να βρείτε τα μονώνυμα που εκφράζουν την περίμετρο και το εμβαδόν του ορθογωνίου. Ποιος είναι ο βαθμός τους ;

Προτεινόμενη λύση

Είναι πλάτος x και μήκος $3x$.

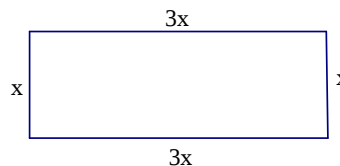
Το μονώνυμο που εκφράζει την περίμετρο

είναι το $x + 3x + x + 3x = 8x$

και είναι $1^{\text{ο}}$ βαθμού.

Το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν είναι το

$x \cdot 3x = 3x^2$ και είναι $2^{\text{ο}}$ βαθμού

**9.**

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει ύψος y και βάση τετράγωνο πλευράς x .

α) Να βρείτε τις αλγεβρικές παραστάσεις που μας δίνουν την επιφάνεια και τον όγκο του παραλληλεπιπέδου. Είναι αυτές μονώνυμα ;

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραπάνω παραστάσεων όταν

$$x = 10 \text{ και } y = \frac{1}{10}$$

Προτεινόμενη λύση**α)**

Η επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου όπως φαίνεται

και στο σχήμα είναι ίση με $2x^2 + 4xy$

και ο όγκος x^2y .

Η παράσταση $2x^2 + 4xy$ δεν είναι μονώνυμο,

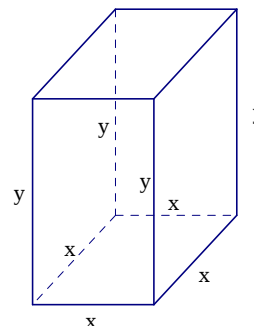
ενώ η x^2y είναι.

β)

Όταν $x = 10$ και $y = \frac{1}{10}$, η τιμή της πρώτης

παράστασης είναι $2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{10} = 200 + 4 = 204$

και της δεύτερης $10^2 \cdot \frac{1}{10} = 100 \cdot \frac{1}{10} = 10$



10.

Για τις διάφορες τιμές του αριθμού λ να βρείτε πότε το μονώνυμο $(2\lambda - 3)x^3 y^2$ με μεταβλητές x και y είναι

- α) 3^ο βαθμού ως προς x
 β) Δεν ορίζεται βαθμός για το μονώνυμο

Προτεινόμενη λύση

Θεωρία 11

α)

Θα πρέπει $2\lambda - 3 \neq 0$ άρα $2\lambda \neq 3$ άρα $\lambda \neq \frac{3}{2}$

β)

Πρέπει το μονώνυμο να είναι μηδενικό μονώνυμο

και αυτό συμβαίνει όταν $2\lambda - 3 = 0$ ή $\lambda = \frac{3}{2}$

11.

Να βρείτε τις τιμές του φυσικού αριθμού μ ώστε η παράσταση $\frac{-2a^{5-\mu}b^{\mu-3}}{5}$ να είναι μονώνυμο και στη συνέχεια να βρείτε το βαθμό αυτού ως προς a

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει $5 - \mu \geq 0$ και $\mu - 3 \geq 0$ άρα
 $\mu \leq 5$ και $\mu \geq 3$
 $3 \leq \mu \leq 5$

Επειδή το μ είναι φυσικός, δεκτές τιμές είναι οι 3, 4, 5

Όταν $\mu = 3$, το μονώνυμο είναι 2^ο βαθμού ως προς a .

Όταν $\mu = 4$ το μονώνυμο είναι 1^ο βαθμού ως προς a

Όταν $\mu = 5$ το μονώνυμο είναι μηδενικού βαθμού ως προς a

12.

Να προσδιορίσετε τις τιμές των κ , λ , μ ώστε τα μονώνυμα $(2\kappa-4)x^4y^\nu$ και $-x^{2\nu}y^\mu$ με μεταβλητές x και y να είναι

- α) όμοια
β) ίσα
γ) αντίθετα

Προτεινόμενη λύση

α)

Πρέπει $2\kappa-4 \neq 0$ και $2\nu=4$ και $\mu=\nu$ άρα
 $\kappa \neq 2$ και $\nu=2$ και $\mu=2$

β)

Πρέπει $2\kappa-4=-1$ και $2\nu=4$ και $\mu=\nu$ άρα
 $\kappa = \frac{3}{2}$ και $\nu=2$ και $\mu=2$

γ)

Πρέπει $2\kappa-4=1$ και $2\nu=4$ και $\mu=\nu$ άρα
 $\kappa = \frac{5}{2}$ και $\nu=2$ και $\mu=2$

13.

Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε οι παραστάσεις $A=3a^{\lambda+2}b^3+6a^5b^\lambda$ και $B=(\lambda-3)x^3y^2+(\lambda+3)x^2y^3$ να είναι ταυτόχρονα μονώνυμα.

Στη συνέχεια να βρείτε το βαθμό τους ως προς τις μεταβλητές τους.

Προτεινόμενη λύση

Η παράσταση A είναι μονώνυμο μόνο όταν $\lambda+2=5$ και $3=\lambda$ δηλαδή $\lambda=3$.

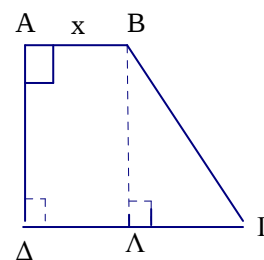
Για $\lambda=3$ η παράσταση B γίνεται $B=6x^2y^3$ που είναι και αυτή μονώνυμο.

Η A είναι 8^{ου} βαθμού ως προς a και b και η B είναι 5^{ου} βαθμού ως προς x και y

14.

Στο τραπέζιο του διπλανού σχήματος είναι $\Delta\Gamma = B\Gamma = 2AB$

- α) Να υπολογίσετε το ύψος του τραpezίου
 β) Να βρείτε το μονώνυμο που εκφράζει την περίμετρο του τραpezίου
 γ) Να βρείτε το μονώνυμο που εκφράζει το εμβαδόν του τραpezίου, και να διακρίνετε το συντελεστή και το κύριο μέρος.



Προτεινόμενη λύση

α)

Αν $AB = x$ τότε $\Delta\Gamma = B\Gamma = 2x$

Φέρουμε το ύψος BL . Τότε $\Delta\Lambda = AB = x$ και αφού $\Delta\Gamma = 2x$ θα είναι και $\Lambda\Gamma = x$.

$$\begin{aligned} \text{Από το Πυθαγόρειο στο τρίγωνο } B\Lambda\Gamma \text{ έχουμε ότι } B\Lambda^2 &= B\Gamma^2 - \Lambda\Gamma^2 \\ &= 4x^2 - x^2 = \\ &= 3x^2 \end{aligned}$$

Άρα $B\Lambda = \sqrt{3x^2} = \sqrt{3} \sqrt{x^2} = |x| \sqrt{3} = x\sqrt{3}$ δεδομένου ότι $x > 0$ αφού εκφράζει μήκος.

β)

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \Delta\Lambda = B\Lambda = x\sqrt{3} \text{ επομένως η περίμετρος είναι } \Pi &= x + 2x + 2x + x\sqrt{3} = \\ &= (5 + \sqrt{3})x \end{aligned}$$

γ)

$$\text{Το εμβαδόν } E \text{ είναι ίσο με } E = \frac{(B + \beta)\nu}{2} = \frac{(2x + x)x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{2}$$

με συντελεστή $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ και κύριο μέρος x^2 .